[illegible]

Subject: المحاضرة الرابعة / /

الفصل الثاني

تعريف تكامل [illegible] ستيلتجس: لتكن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان معرفتان ومحدودتان على $[a,b]$ ولتكن T تجزئة ما للمجال $[a,b]$

$$T = [a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b]$$

ولنختار في كل مجال جزئي $[x_{k-1}, x_k]$ نقطة t_k حيث $k = 1, 2, \dots, n$ ولنشكل المجموع الآتي ①

$$S(f, g, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$ حيث معرف بالشكل

إن هذا المجموع يسمى مجموع ستيلتجس للتكامل للدالة $f(x)$ بالنسبة للدالة $g(x)$ والموافق للتجزئة T وإذا كانت النهاية الآتية

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} S(f, g, T) \quad \dots (2)$$

موجودة ومحدودة ومستقلة عن تجزئة المجال واختيار النقاط t_k من أطوال = التجزئة

فنسمي هذه النهاية بتكامل ستيلتجس للدالة $f(x)$ بالنسبة للدالة $g(x)$ على المجال $[a,b]$ أي أن هذه النهاية

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} S(f, T) = (S)\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

P.S إن تكامل ستيلتجس هو تعميم لتكامل ريمان لأنه إذا كان $g(x) = x$ فيؤول إلى تكامل ريمان

- يمكن صياغة تعريف ستيلتجس بالشكل الآتي:

$$I = \int f(x)\,dg(x)$$

$$\lim_{\lambda(T) \to 0} S(f, g, T) = I \iff \forall \varepsilon > 0 ; \exists \delta > 0$$

$$; \lambda(T) < \delta \Rightarrow$$

$$|S(f, g, T) - I| < \varepsilon$$ وذلك إذا كانت T تجزئة للمجال المغلق $[a,b]$ وذلك بالنسبة لـ

أيا كانت t_k من أطوال = التجزئة $[x_{k-1}, x_k]$

$\varphi(x) = f(x) - J_p(x)$

محاضرة 7 ب 2

* خواص تكامل ستيلجس

* مفروض أن التكاملين $\int_a^b f_1(x)\, d(g(x))$, $\int_a^b f_2(x)\, d(g(x))$ موجودين وليكن α_1, β_1 عددان حقيقيان ثابتين

$$\int_a^b [\alpha_1 f_1(x) + \beta_1 f_2(x)]\, dg(x) = \alpha_1 \int_a^b f_1(x)\, dg(x) + \beta_1 \int_a^b f_2(x)\, dg(x)$$

* إذا كان التكاملين $\int_a^b f(x)\, dg_1(x)$ ، $\int_a^b f(x)\, dg_2(x)$ موجودين وليكن α', β' عددين حقيقيين ما فإن:

$$\int_a^b f(x)\, [illegible]\, d(\alpha' g_1(x) + \beta' g_2(x)) = \alpha' \int_a^b f(x)\, dg_1(x) + \beta' \int_a^b f(x)\, dg_2(x).$$

(أي أن f قابلة للتكامل بالنسبة لـ g_1, g_2 ، dg_1, dg_2)

* قانون التكاملة بالتجزئة:

إذا كان أحد التكاملين الآتيين $\int_a^b f(x)\, d(g(x))$, $\int_a^b g(x)\, d(f(x))$ موجوداً فيكون التكامل الآخر موجود فإن

$$\int_a^b f(x)\, d(g(x)) + \int_a^b g(x)\, d(f(x)) = [f(x)\, g(x)]_a^b$$

$$= f(b)\, g(b) - f(a) \cdot g(a)$$

P.S لتكن النقطة c حيث $a < c < b$ وإذا كان التكامل $\int_a^b f(x)\, d(g(x))$ موجوداً فيكون كل من التكاملين التاليين $\int_a^c f(x)\, d(g(x))$, $\int_c^b f(x)\, d(g(x))$ موجودة أيضاً وإن

$$\int_a^c f(x)\, d(g(x)) + \int_c^b f(x)\, d(g(x)) = \int_a^b f(x)\, d(g(x))$$

- ((القابلية للمكاملة على $[a,b]$ تقتضي قابلية المكاملة على أي مجال جزئي منه غير أن العكس غير صحيح بشكل عام))

العكس يكون صحيح فيما كانت احدى الدالتين مستمرة في النقطة $x=c$ والأخرى محدودة في جوارها

مثال: لتكن الدالتان $f(x)$ و $g(x)$ المعرفتان على المجال $[-1,+1]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن f, g غير مستمرين بالنقطة $x=0$ وإن $\int_{-1}^{0} f(x)\, dg(x)$, $\int_{0}^{+1} f(x)\, dg(x)$ موجودين وذلك لأن:

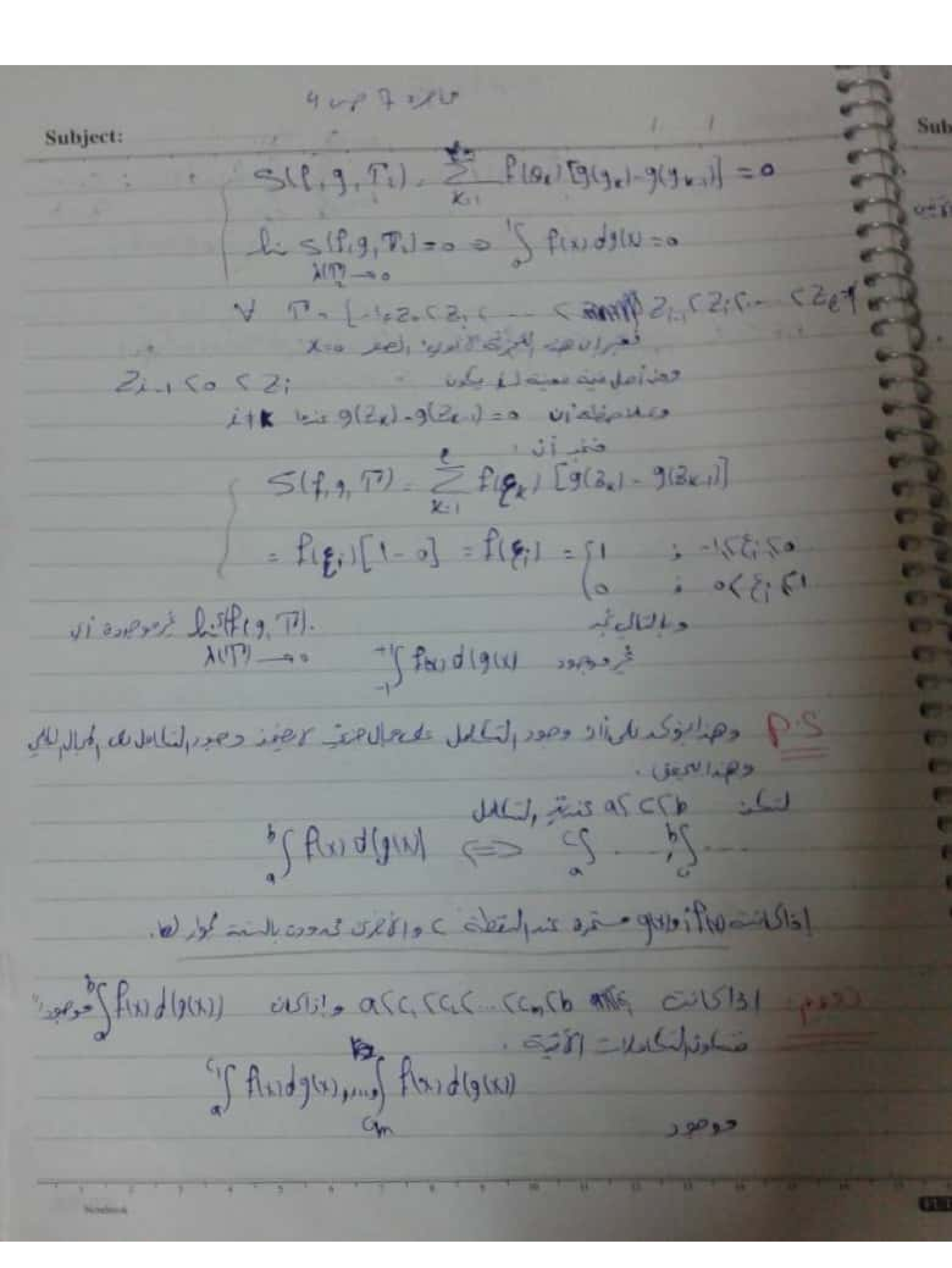
لتكن T_1 التجزئة ما للمجال $[-1,0]$

$$\forall T_1 = \{-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 0\}$$

$$S(f, g, T_1) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\,[g(x_k) - g(x_{k-1})] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\lambda(T_1) \to 0} S(f, g; T_1) = 0$$

ومن جهة ثانية، $\forall T_2 = \{0 = y_0 < y_1 < \dots < y_m = 1\}$



تابع ٣ ص ٤

Subject:

$$S(f,g,T_1) = \sum_{k=1} f(\theta_k)[g(y_k)-g(y_{k-1})] = 0$$

$$\lim_{\lambda(T_1)\to 0} S(f,g,T_1) = 0 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dg(x) = 0$$

$$\forall\ T = [-1 = z_0 < z_1 < \dots < z_{i-1} < z_i < \dots < z_\ell = 1]$$

نعتبر ان نقطة التجزئة الاولى الصفر $x = 0$

تحتوي على فترة معينة لـ i يكون $z_{i-1} < 0 < z_i$

وحيث ان $g(z_k) - g(z_{k-1}) = 0$ عندما $i \neq k$

فنجد أن:

$$S(f,g,T) = \sum_{k=1}^{\ell} f(\xi_k)[g(z_k) - g(z_{k-1})]$$

$$= f(\xi_i)[1-0] = f(\xi_i) = \begin{cases} 1 & ; -1 \le \xi_i \le 0 \\ 0 & ; 0 < \xi_i \le 1 \end{cases}$$

وبالتالي فإن $\lim_{\lambda(T)\to 0} S(f,g,T)$ غير موجودة اي

$\int_{-1}^{1} f(x)\,d(g(x))$ غير موجود

P.S وهذا يؤكد على ان وجود التكامل على مجال جزئي لا يضمن وجود التكامل على المجال الكلي وهذا العكس.

لتكن $a < c < b$ كنقطة التكامل

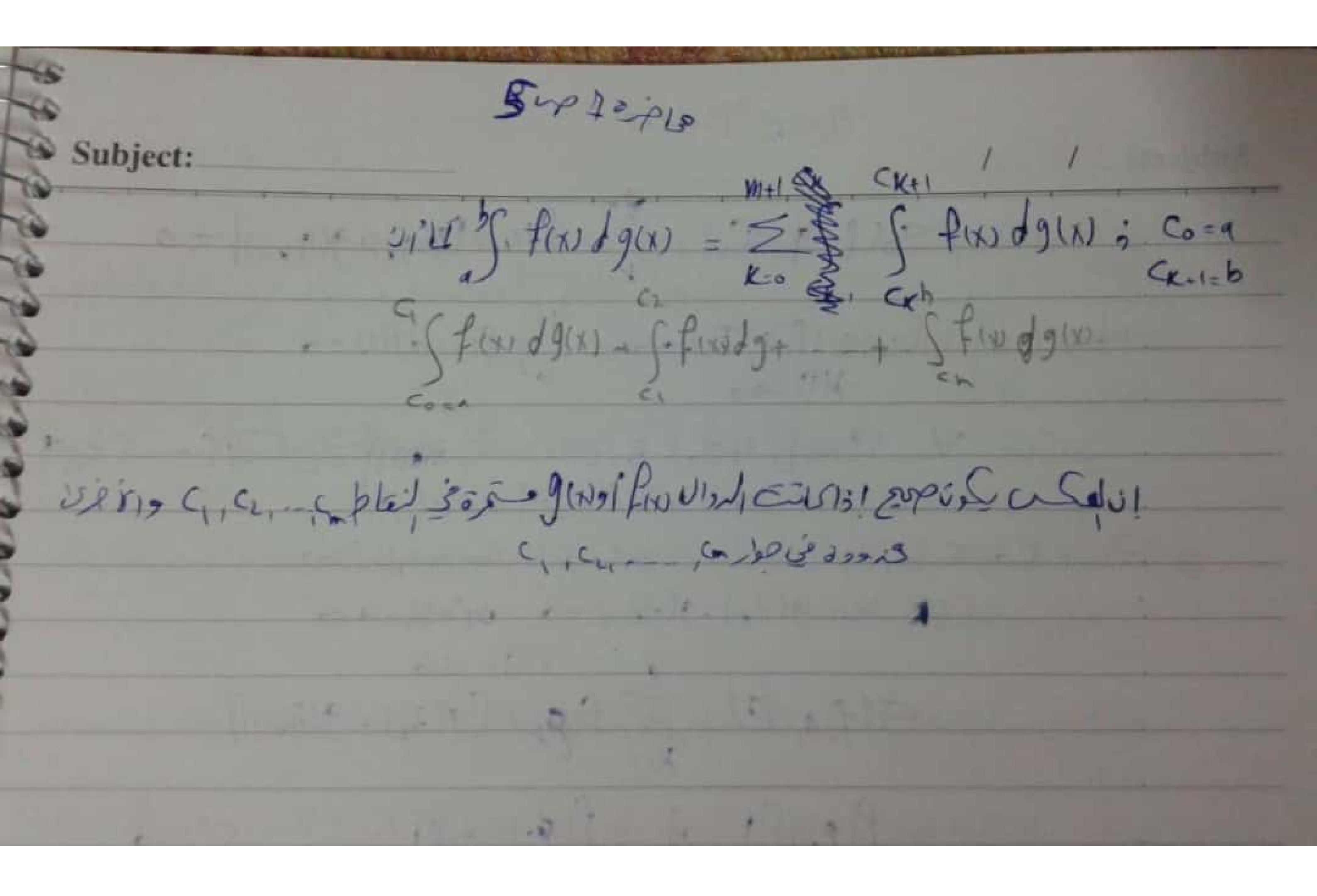
$$\int_a^b f(x)\,d(g(x)) \Longleftrightarrow \int_a^c \dots \int_c^b \dots$$

اذا كانت $f(x)$ او $g(x)$ مستمرة عند النقطة c والأخرى محدودة بالنسبة لجوارها.

تعميم: اذا كانت $a < c_1 < c_2 < \dots < c_m < b$ واذا كان $\int_a^b f(x)\,d(g(x))$ موجودا فتكون التكاملات الآتية:

$$\int_a^{c_1} f(x)\,dg(x), \dots, \int_{c_m}^{b} f(x)\,d(g(x))$$

موجود



ملاحظة مهمة

Subject:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dg(x) \; ; \; c_0 = a,\; c_{k+1} = b$$

$$\int_{c_0=a}^{c_1} f(x)\,dg(x) + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dg + \dots + \int_{c_n} f(x)\,dg(x)$$

إن العكس يكون صحيح إذا كانت الدوال $f(x)$ أو $g(x)$ مستمرة في النقاط $c_1, c_2, \dots, c_n$ وإلا غير محددة في طرفي $c_1, c_2, \dots, c_n$